

SINTEZA GRANT 1192/2009

Colectivul Grantului este format din Dan Tiba si Lori Badea, CS 1 la Institutul de Matematica "Simion Stoilow", Bucuresti, Andrei Halanay, profesor universitar la Univ. Politehnica, Bucuresti, Cristian Danet, lector la Universitatea Craiova si Diana Merlusca, masterand la Universitatea Constanta. Activitatea in cadrul Grantului s-a concretizat in elaborarea mai multor lucrari, din care cinci sunt deja publicate sau acceptate pentru publicare (trei in reviste ISI), iar alte doua sunt in curs de finalizare. Lucrarile au ca autori membri ai colectivului Grantului si colaboratori ca J.F.Bonnans (Ecole Polytechnique, Paris), Rolf Krause (Univ. Bonn), P.Neittaanmaki si A. Pennanen (Univ. Jyvaskyla), M.Sofonea (Univ. Perpignan). Detalii in aceasta privinta si rezumatele acestor lucrari sunt incluse in partea finala a prezentului raport.

O alta directie de actiune in cadrul grantului este un seminar stiintific pe problematica Grantului, care a inceput in martie 2009 si a continuat dupa vacanta de vara si ale carui sedinte se tin la doua saptamini. Pina in prezent au avut loc urmatoarele expuneri :

- 1) Lori Badea :Introducere in metoda descompunerii cu suprapunere a domeniilor, Metode de descompunere a domeniilor pentru minimizarea cu restrictii a functionalelor convexe nepatratice, Metode multigrid pentru inegalitati variationale, Metode de descompunere a domeniilor pentru inegalitati variationale continind operatori de contractie, Metode de descompunerea domeniilor pentru inegalitati nevariationale, Metode de descompunere a domeniilor pentru inegalitati quasi-variationale, Metode de descompunere a domeniilor pentru problema Navier-Stokes.
 - 2) Dan Tiba : Un algoritm de tip Schwarz pentru problema Cauchy la ecuatii eliptice, Aproximare prin element finit in probleme de optimizarea formelor cu conditii Neumann sau mixte la frontiera.
 - 3) Andrei Halanay : Teorema de existenta a solutiilor periodice pentru ecuatii cu intirziere, Modele matematice ale unor leucemii sub tratament.
 - 4) Diana Merlusca :Probleme de control si design optimal
 - 5) Peter Philip (Univ. Ludwig-Maximilians, Munchen) : Numerical analysis, control and simulation of conductive-radiative heat transfer
 - 6) Mircea Sofonea (Univ. Perpignan) :Modeling and analysis of piezoelectric contact
- Colectivul Grantului este implicat in organizarea celei de-a zecea Conferinte Franco-Romana care va avea loc la Univ. Poitiers, Franta in august 2010. Dan Tiba este unul din coordonatorii acestei conferinte, iar Lori Badea este coorganizator impreuna cu Andrei Constantinescu si Mikael Barboteu al unei sesiuni speciale. Detalii se gasesc pe site-ul Institutului de Matematica www.imar.ro si pe site-ul Univ. Poitiers www-math.univ-poitiers.fr/CFR2010/.

Participare conferinte si contacte internationale : Cristian Danet a efectuat in perioada ianuarie-iunie 2009 un stagiu de documentare si cercetare la Universitatea Ulm, Germania, in colaborare cu prof. Dietmar Schulz, sustinut financiar printr-o bursa KAAD. Dan Tiba a participat in perioada 23-27 martie 2009 la Conferinta si Scoala de Primavara "Optimization with interfaces and free boundaries", desfasurata la Univ.

Regensburg, Germania si a sustinut conferinta "Existence and approximation in optimal design", Lori Badea a efectuat vizita in perioada 22-27 februarie la Freie Universitat, Berlin, suportata partial de programul Matheon si dedicate unor discutii asupra convergentei metodelor de corectie pe subspatii, aplicate la rezolvarea inegalitatilor variationale cu prof. Ralf Kornhuber.

Diana Merlusca a participat la Scoala de Vara organizata de Univ. Jyvaskyla, Finlanda in perioada 8-20 august, sustinuta financiar de aceasta universitate. A audiat cursurile prof. Enrique Zuazua, despre probleme de optimizare.

PREZENTARE LUCRARI

1. FIXED DOMAIN APPROACHES IN SHAPE OPTIMIZATION PROBLEMS WITH DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS, de Dan Tiba, Pekka Neittaanmaki, Anssi Pennanen, publicata in **INVERSE PROBLEMS**, Vol.25, no.5, p.1-18 (2009), revista ISI de prima categorie CNCSIS, din USA. Factor de impact 1,917, locul 6 mondial in domeniul respectiv.

In lucrare se considera probleme de optimizare geometrica, in care domeniul este necunoscuta, guvernate de ecuatii liniare eliptice de ordinul doi, cu coeficienti masurabili si marginiti. Functionala de cost ce trebuie minimizata este de tip integral. Se pot adauga si restrictii de tip algebric punctuale sau integrale (inegalitati, egalitati). Aceste probleme pot fi interpretate ca o extindere a problematicii controlului optimal (in care domeniul unde este definita problema este parametrul optimizarii) si, mai general, a problemelor de calculul variatiilor.

Asemenea probleme au numeroase aplicatii si modeleaza procesul de proiectare a unei structuri sau a unui obiect. Rezultatul trebuie sa satisfaca anumite conditii care se exprima matematic prin restrictii, el trebuie sa fie efficient, ceea ce este asigurat prin minimizarea functionalei de cost, iar ecuatia cu derivate partiale (eliptica in acest caz) descrie procesul fizic ce are loc in respectiva structura (tensiuni, deformari) si care, de asemenea, trebuie influentat/optimizat prin alegerea formei avantajoase a obiectului/structurii respective.

Dificultati deosebite apar si in cadrul procedurilor de aproximare numerica, incepind chiar de la generarea unei retele de element finit, tinind cont de caracterul necunoscut/variabil al geometriei si de lipsa proprietatilor de regularitate. Exista foarte multe proceduri ce apar in literatură matematica, iar lucrarea de fata descrie si justifica matematic o metoda bazata pe folosirea unor domenii fixe. Acest lucru este posibil printr-o procedura de aproximare folosind penalizarea ecuatiei eliptice in exteriorul domeniului unde este definita. Se demonstreaza rezultatul de convergenta, iar problema originala de optimizarea formelor este aproximata printr-o problema de control in coeficienti, definite intr-un domeniu "universal" fixat. Se obtine gradientul functionalei de cost in noul cadru si se experimenteaza aplicarea unei metode de tip

gradient in mai multe exemple numerice. Rezultatele argumenteaza avantajele noii metode introduce in aceasta lucrare.

2. CONTROL PROBLEMS WITH MIXED CONSTRAINTS AND APPLICATION TO AN OPTIMAL INVESTMENT PROBLEM, de J.Frederic Bonnans si Dan Tiba, acceptata spre publicare in *Mathematical Reports*, vol. 11(61), no.4 (2009), revista ISI.

Lucrarea trateaza doua probleme de control optimal guvernate de ecuatii parabolice si incluzind cazul dificil al restrictiilor de tip mixt (control-stare) pentru care conditia standard de "calificare" a restrictiilor nu este verificata. Comanda este de tip distribuit a parind in membrul drept al ecuatiei de stare. Prima problema discutata este de tip "bottleneck", iar a doua este o problema de investitii optimale. Se foloseste o metoda de penalizare adaptata si se obtin conditiile de optimalitate. Forma conditiilor de optimalitate obtinute are avantajul unei anumite simetrii in sensul ca starea si comanda joaca un rol simetric. Se deduc informatii utile referitoare la solutia problemei, de tipul proprietati de bang-bang generalizate.

3. THE CONTROL VARIATIONAL METHOD FOR CONTACT OF EULER-BERNOULLI BEAMS de Mircea Sofonea si Dan Tiba, tiparita in *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III*, vol.2 (51), p.127-136 (2009).

Se discuta doua modele ce descriu procesul de echilibru al unei bare in contact cu un obstacol.. Se foloseste modelul Euler-Bernoulli, iar contactul este modelat prin conditii de tip Signorini sau compliance. Formularea variationala este de tip inecuatie variationala. Metoda de control variational discuta minimizarea energiei corespunzatoare prin tehnici de control optimal si nu prin calculul variatiilor ca in abordarea clasica. In acest mod se pot genera mai multe cai de solutionare a ecuatiilor, cu avantaje atat la nivel numeric cit si din punct de vedere teoretic. De exemplu, rezolvarea ecuatiei neliniare de ordin patru este redusa la solutionarea unor ecuatii liniare de ordin doi si se stabilesc si unele proprietati de regularitate.

4. METODE SCHWARZ CU UNA SAU DOUA RETELE DE DISCRETIZARE PENTRU INEGALITATI VARIATIONALE DE SPETA A DOUA SI APLICATII LA PROBLEME DE CONTACT CU FRECARE de Rolf Krause si Lori Badea, lucrare in faza avansata de pregatire, pentru revista *Numerische Mathematik*

Pentru rezolvarea numerica a inegalitatilor variationale ne liniare, in ultimii 10-15 ani, mai multe startegii au fost dezvoltate. Pe langa strategiile bazate pe rezolvarea unei secvente de probleme liniare, ca de exemplu, strategiile primale-duale de multime activa, sau abordari prin regularizare, au fost investigate si metodele neliniare de tip Schwarz. Metodele de descompunerea domeniilor de tip Schwarz au o larga raspindire la rezolvarea problemelor liniare si furnizeaza algoritmi foarte eficienti si robusti. Generalizarea lor la probleme neliniare, ca de exemplu, inegalitatile

variationale, nu este totusi evidenta. In particular, gasirea unei estimari a vitezei de convergenta pentru metoda cu doua retele de discretizare sau pentru metodele Schwarz multi-nivel, este departe de a fi triviala pentru problemele neliniare.

In primul rind, noi introducem algoritmi de corectie pe subspatii pentru rezolvarea inegalitatilor variationale de speta a doua si a inegalitatilor quasi-variationale intr-un spatiu Banach reflexiv, demonstram ca ei sint convergenti si dam estimari ale erorii. In contextul discretizarilor element finit, daca subspatiile sint asociate unei descompuneri a domeniului compatibila cu reseaua de discretizare folosita, sau cu spatiul de elemente finite corespunzind la o retea de discretizare grosiera, algoritmi introdusi sint de fapt metode Schwarz cu unul sau doua nivele. In acest caz, putem scrie explicit rata de convergenta in functie de parametrii retelelor si de parametrul de suprapunere a subdomeniilor. Pe baza acestui rezultat, aratam ca metodele introduse au o rata de convergenta optimala.

Pe linga analiza teoretica a convergentei metodelor propuse, rezultatele obtinute sint aplicate si in contextul problemelor de contact cu frecare. Mai intii, sint prezentate problemele cu frecare locala. Problema cu frecare de tip Tresca este scrisa ca o inegalitate variationala de speta a doua, in timp ce formularea slaba a problemei cu frecare de tip Coulomb este data de o inegalitate quasi-variationala. Pentru problema cu frecare ne locala, aminitim rezultatele privind existenta si unicitatea solutiei. In continuare, demonstram ca metodele cu una sau doua retele de discretizare converg optimal atit pentru problemele de contact cu frecare de tip Tresca cit si pentru problemele quasi-variationale date de problemele de contact cu frecare non-locala de tip Coulomb. Cele mai multe metode numerice pentru rezolvarea problemelor de contact cu frecare sint bazate pe aproximarea frecarii de tip Coulomb printr-un sir de probleme cu frecare de tip Tresca. Aceasta corespunde la aproximarea solutiei unei inegalitati quasi-variationale cu ajutorul unui sir de solutii ale unor inegalitati variationale de speta a doua. Datorita timpului de calcul ridicat, care este generat de rezolvarea repetata a unor inegalitati variationale, aceasta procedura nu este atractiva. Mai mult, in aceasta metoda de punct fix ,constanta de contractie degenereaza pentru parametrii mici ai retelei de discretizare. Deci, metodele de descompunerea domeniilor de tip Schwarz propuse, cu una sau doua retele de discretizare, folosind o aproximare directa a legii de frecare de tip Coulomb, furnizeaza un alt tip de metode mai eficiente.

5. UNIQUENESS IN SOME HIGHER ORDER ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN N DIMENSIONAL DOMAINS

de Cristian Danet, lucrare in faza avansata de pregatire pentru revista *Applicable Analysis*

Se realizeaza un studiu calitativ (se obtin rezultate de unicitate si estimari apriorice) al unor clase de ecuatii eliptice, de ordinul 4 (liniare si semiliniare) si de ordinul 6 (liniare).

Principala metoda de investigatie este principiul de maxim generalizat (metoda functiei P). In particular, se trateaza o problema la limita semiliniara de ordinul 4 care apare in teoria placilor. Pentru aceasta problema la limita se obtin rezultate de unicitate pentru solutie (cazul domeniilor neconvexe si neregulate n dimensionale, caz netratat in literatura de specialitate) si estimari apriorice pentru solutie si gradientul acesteia.

6. STABILITY ANALYSIS FOR A MATHEMATICAL MODEL OF CHEMOTHERAPY ACTION IN HEMATOLOGICAL DISEASES, de Andrei Halanay, acceptata spre publicare in Bull. Math. , revista ISI, Romania. In lucrare este studiat un model al evolutiei celulelor stem hematopoetice in doua stadii : celule care prolifereaza, a caror densitate la momentul t este $x_1(t)$ si celule dormante (in repaus), cu densitate $x_2(t)$ la momentul t . Modelul este dat de urmatorul sistem de ecuatii diferentiale cu intarziere

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\gamma x_1 + \beta(x_2)x_2 - e^{-\gamma\tau}\beta(x_{2\tau})x_{2\tau} - g_1(t)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\delta x_2 - \beta(x_2)x_2 + 2e^{-\gamma\tau}\beta(x_{2\tau})x_{2\tau} - g_2(t)x_2\end{aligned}\tag{1.1}$$

$x_{2\tau}(t) = x_2(t - \tau)$. Termenul $e^{-\gamma\tau}\beta(x_{2\tau})x_{2\tau}$ este fractiunea de celule proliferante care paraseste faza de proliferare in care au intrat la momentul $(t - \tau)$ prin diviziune urmata de intrarea in faza de repaus. γ este rata de apoptoza a celulelor proliferante. Celulele dormante se pot diferentia intr-una din liniile principale de celule sanguine (rosii, albe, trombocite)cu o rata δ sau pot reentra in faza proliferativa scaderea fiind exprimata de $(-\beta(x_2)x_2)$. Termenul $2e^{-\gamma\tau}\beta(x_{2\tau})x_{2\tau}$ din a doua ecuatiei reprezinta celulele fiice dormante care apar din diviziunea celulelor proliferative corespunzatoare. Rata de reintroducere β e luata cel mai adesea o functie Hill descrescatoare, care, dupa o schimbare de variabila, devine

$$\beta(x) = \beta_0 \frac{1}{1 + x^n}, \quad n > 0\tag{1.2}$$

τ , dupa cum a rezultat si mai inainte, este timpul necesar unei celule care a intrat in faza proliferativa pentru a se diviza. Doi termeni redau efectul tratamentului, $g_1(t) \geq 0$ si $g_2(t) \geq 0$, care contribuie la descresterea numarului de celule in fiecare faza.

In lucrare se analizeaza stabilitatea solutiei banale a sistemului (1.1) cand o functie periodica g cu perioada ω reprezinta efectul tratamentului. Solutia banala corespunde disparitiei populatiei de celule tumorale. Rezultatul principal demonstrat in lucrare este ca daca $\tau - k\omega$ este mic pentru un $k \in \mathbf{N}$ tratamentul imbunatateste stabilitatea solutiei banale daca actioneaza asupra compartimentului celulelor dormante infectate dar nu si daca actioneaza exclusiv asupra celulelor proliferative. Rezultatul vine in sprijinul terapiilor care actioneaza asupra compartimentului celulelor stem. Deoarece unele terapii larg raspandite,(de exemplu cea cu Imatinib, in cazul leucemiei

Myeloide Cronice) par a nu avea efect asupra celulelor stem dormante ele trebuie asociate cu terapii care tintesc precis acest compartiment.

7. PERIODIC SOLUTIONS IN MATHEMATICAL MODELS FOR HEMATOLOGICAL DISEASES UNDER TREATMENT, de Andrei Halanay, aparuta in IFAC Proceedings, 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems, IFAC PapersOnLine.

Punctul de plecare al studiului efectuat in aceasta lucrare il constituie lucrarea lui J. Clairambault, D. Claude, E. Filipki, T. Granda, F. Levi, *Toxicité et efficacité antitumorale de l'oxaliplatine sur l'osteosarcome de Glasgow induit chez la souris: un modele mathématique*, publicata in Pathologie Biologie 51 (2003), pag. 212-215. Aici un sistem de ecuatii diferentiale ordinare este folosit pentru a modela evolutia populatiei de celule canceroase in osteosarcomul Glasgow la soareci, sub influenta tratamentului cu oxaliplatina. Daca nu se dezvoltă rezistenta la tratament, modelul e dat de

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -\lambda P + \frac{i_0(t)}{V} \\ \dot{D} &= -\nu D + P \\ \dot{B} &= -aB \ln\left(\frac{B}{B_{\max}}\right) - g(D)B\end{aligned}\tag{1.1}$$

unde: P este concentratia plasmatica a medicamentului. $i_0(t)$ este debitul instantaneu al medicamentului injectat la momentul t ; i_0 este presupusa periodica de perioada ω [zile]. D este concentratia de substanta activa in tumoare. B este numarul de celule canceroase, cu B_{\max} valoarea asimptotica a lui B . λ, ν, V si a sunt constante strict pozitive. Vom lua

$$g(D) = \frac{D}{D_0 + D}\tag{1.2}$$

unde D_0 e constanta.

Obiectivul tratamentului este de a avea cel mai mic numar de celule tumorale cu cel mai redus efect toxic asupra organismului. Se arata ca, daca i_0 e periodica de perioada ω , sistemul

$$\begin{cases} \dot{P} = -\lambda P + \frac{i_0(t)}{V} \\ \dot{D} = -\nu D + P \end{cases}\tag{1.3}$$

are o solutie ω -periodica pozitiva $(P^*(t), D^*(t))$. Aceeasi schema de control este aplicata la o ecuatie care descrie evolutia celulelor stem hematopoietice.

Daca $x(t)$ este densitatea celulelor stem hematopoietice, dinamica lui x e data de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -\delta x(t) - \beta[x(t)]x(t) + \\ & + 2e^{-\gamma\tau}\beta[x(t-\tau)] \cdot x(t-\tau) - g[D^*(t)]x(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

unde, dupa scalare,

$$\beta(x) = \beta_0 \frac{1}{1+x^n}, \quad \beta_0 > 0, \quad n \geq 1 \quad (1.5)$$

D^* este solutia periodica a (1.3), g va fi luat ca inainte, δ, γ, τ sunt constante pozitive..

Daca ω este perioada lui i_0 , deci a lui D^* si $\tau = k\omega$, $k \geq 1$, se demonstreaza in lucrare ca, folosind o conditie suplimentara, ecuatiea (1.4) are o solutie ω -periodica nenula si stabilitatea acesteia este discutata. Demonstratia existentei foloseste o teorema de punct fix a lui Krasnoselskii.